

ХЛІ Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкіль, 1 – 26 июля 2025 года

8 КЛАСС

ГРУППА ПРОФИ

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Составители:

Пикалов П.С.
Потехин Ю.С.
Терёхин А.С.

Вишкіль
2025

Содержание

Благодарности	4
Серия №0. Числа и цвета.....	5
Серия №1. Векторы.....	6
Серия №2. Поправьте степень!	8
Серия №3. Разнобой – 1.....	9
Серия №4. Олимпиады и задачи.....	10
Серия №5. Суммы	11
Серия №6. Разнобой – 2.....	12
Серия №7. Массы в массы!	13
Серия №8. Усреднение	15
Серия №9. Балансировка коэффициентов	16
Серия №10. Бесконечность	17
Серия №11. Векторы – 2.....	18
Серия №12. Раскраски вершин	19
Серия №14. Суммы квадратов – 2. Теоремы.....	21
Серия №15. Скалярное произведение.....	24
Серия №16. Иррациональности	25
Серия №17. Квадратичные вычеты	26
Серия №18. Гамильтонов путь и цикл.....	28
Серия №19. Гомотетия и конструкции	29
Серия №20. Многочлены. Теорема Безу	31
Серия №21. Поворотная гомотетия.....	32
Серия №23. (Не) счётность	35
Серия №24. Лемма (не) Бернсайда.....	36
Серия №25. Теорема Шаля	38
Серия №26. Квадратичные иррациональности	40
Серия №27. Орграфы	41
Серия №28. Композиция поворотов	43
Серия №30. Геометрический разнобой.....	45
Серия №31. Теория Рамсея	46
Серия №33. Неравенство Гёльдера	48
Серия №34. Первообразный корень.....	50

Серия №35. Теорема Хелли	52
Вступительная олимпиада.....	53
Математический бой М8 смешанный.....	54
Математический бой М8 профи	55
Математический бой М8-М9 профи	56
Математический бой М7-М8 профи	57

Благодарности



Дорогие ученики М8 Профи!

Такими Вы нам запомнитесь – юными, целеустремлёнными, весёлыми! «Хочу всё знать» – это про Вас. Мы пытались Вас удивлять интересными и сложными задачами, рассказать что-то новое для каждого. Удивлялись и сами, читая и слушая ваши решения на матбоях и олимпиадах. Результат наших совместных трудов – эта книга. Читайте и вспоминайте с удовольствием. Ждём новых встреч!



Материалы занятий

Серия №0. Числа и цвета

2 июля

1. Все натуральные числа раскрасили в два цвета: желтый и зеленый. Известно, что сумма любых двух различных желтых чисел также является желтым числом. Кроме того, сумма любых двух зеленых чисел также является зеленым числом. Сколько различных раскрасок, удовлетворяющих этому условию, существует?
2. Можно ли раскрасить все натуральные числа в три цвета так, чтобы сумма любых четырех чисел одного цвета имела бы этот же цвет?
3. Докажите, что если все натуральные числа раскрасить в два цвета, то найдутся два числа одного цвета с разностью 20 или 25?
4. Школьник на уроке заскучал и начал красить каждое натуральное число в белый, синий или красный цвет так, чтобы все три цвета присутствовали и выполнялось свойство: цвет суммы любых двух разноцветных чисел не совпадает с цветами слагаемых. Удается ли ему это сделать?
5. Все натуральные числа, большие единицы, раскрасили в два цвета, синий и красный, так, что сумма каждых двух синих (в том числе одинаковых) синяя, а произведение каждых двух красных (в том числе одинаковых) красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2025?
6. Каждое натуральное число покрашено в оранжевый или фиолетовый цвет. Известно, что в любом наборе из нескольких последовательных чисел количества оранжевых и фиолетовых чисел отличаются не более, чем на 1000. Докажите, что существуют 2000 последовательных чисел, среди которых ровно 1000 фиолетовых и 1000 оранжевых.
7. Натуральные числа раскрашены в семь цветов. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел одного цвета с одинаковой разностью.
8. Артем и Катя играют в следующую игру: каждым ходом Артем выбирает натуральное число, которое еще не красили, а Катя красит его в черный или белый цвет по своему усмотрению. Катя хочет, чтобы в некоторый момент между двумя одноцветными числами нашлись 2025 чисел другого цвета. Сможет ли Артем ей помешать?
9. а) Все натуральные числа раскрашены в три цвета. Докажите, что найдутся два числа одного цвета, разность между которыми является квадратом натурального числа.
б) Верно ли это для большего количества цветов?

Серия №1. Векторы

3 июля

Определение. Вектор – класс всех направленных отрезков, совпадающих по длине и направлению. Векторы сонаправлены, если направления совпадают, и коллинеарны, если направления параллельны. Нулевой вектор $\vec{0}$ – длина равна 0, коллинеарен любому вектору.

Векторы можно складывать, вычитать, умножать на число, поворачивать.

- Сложить несколько векторов – отложить каждый следующий от конца предыдущего.
 - Правило параллелограмма:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон сложения).
 - Если сумма неколлинеарных векторов равна $\vec{0}$, то из них можно выложить выпуклый многоугольник.
 - Если повернуть все векторы на один и тот же угол, то их сумма повернётся на тот же угол.
- Пусть точка M – точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что для любой точки O на плоскости верно равенство $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$.

Задачи

- Пусть $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ – два параллелограмма с общей вершиной. Докажите, что $\vec{CC_1} = \vec{BB_1} + \vec{DD_1}$.
- Дан четырехугольник $ABCD$. Точки M и N – середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что $\vec{MN} = \frac{\vec{BA} + \vec{CD}}{2} = \frac{\vec{CA} + \vec{BD}}{2}$.
- На плоскости даны два неколлинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} . Докажите, что любой вектор в этой плоскости можно единственным образом представить в виде $x\vec{a} + y\vec{b}$.
 - Даны три неколлинеарные точки A, B, C . Пусть $\vec{AT} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$. Докажите, что T лежит на прямой BC тогда и только тогда, когда $x + y = 1$.
- На плоскости нарисованы два квадрата – $ABCD$ и $KLMN$ (их вершины перечислены против часовой стрелки). Докажите, что середины отрезков AK, BL, CM, DN также являются вершинами квадрата.
- На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BSA_1 и CAB_1 . Докажите, что $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.
- Из медиан треугольника ABC составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан треугольника $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, причем коэффициент подобия равен $3/4$.
- На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2 . Аналогично на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 , а на стороне AC – точки B_1 и B_2 . Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен 60° . Докажите, что $\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{AC} = \frac{C_1C_2}{AB}$.

10. D и E – точки на сторонах AC и AB треугольника ABC соответственно. Кроме того, DE не параллельно CB . Пусть F и G – точки на BC и ED соответственно такие, что $\frac{BF}{FC} = \frac{EG}{GD} = \frac{BE}{CD}$. Докажите, что GF параллельно биссектрисе угла $\angle BAC$.
11. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a – ортоцентр треугольника BCD , M_a – середина отрезка AH_a ; точки M_b , M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a , M_b , M_c и M_d совпадают.
12. Пусть точка I – центр вписанной окружности треугольника $A_1A_2A_3$, точки I_1 , I_2 , I_3 – центры внеписанных окружностей, противолежащих вершинам A_1 , A_2 , A_3 соответственно, G – точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$, точка H_1 – ортоцентр треугольника $I_1A_2A_3$. Аналогично определяются точки H_2 и H_3 . Докажите, что прямые A_1H_1 , A_2H_2 , A_3H_3 пересекаются в одной точке, причём эта точка лежит на прямой IG .

Серия №2. Поправьте степень!

3 июля

Напоминание. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ где } a_i \geq 0.$$

Примеры1. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + \frac{8}{x}$ при $x > 0$.2. Докажите неравенство для положительных a, b :

$$\frac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2b^3 - 16$$

Задачи3. Докажите неравенство при $x > 0$:

$$3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

4. Пусть $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 6$. Докажите неравенство:

$$\frac{a^3}{a^4 + 1} + \frac{6b^2}{b^3 + 16} + \frac{54c^2}{c^4 + 243} \leq 3$$

5. Докажите неравенство:

$$x^8 + y^4 + 1 \geq x^2y(x^2 + y + 1)$$

6. Пусть n и k натуральны, $n > k$, $a > 0$. Докажите неравенство:

$$na^k - ka^n \leq n - k$$

7. Найдите наибольшее значение выражения $x^p y^q$, где p, q – натуральные числа, а x, y – положительные числа и $x + y = a$.В следующих трёх задачах числа a, b, c – положительны.8. Пусть $a + b + c = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{a^2 + b^3 + c^3} + \frac{b}{b^2 + c^3 + a^3} + \frac{c}{c^2 + a^3 + b^3} \leq \frac{1}{5abc}$$

9. Пусть $a + b + c = 3$. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq 1$$

10. Пусть $a + b + c = 3$. Докажите неравенство:

$$2\sqrt{a + \sqrt{b}} + 2\sqrt{b + \sqrt{c}} + 2\sqrt{c + \sqrt{a}} \leq \sqrt{8 + a - b} + \sqrt{8 + b - c} + \sqrt{8 + c - a}$$

Серия №3. Разнобой – 1

3 июля

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1 . Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K . Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L . Докажите, что точки K , L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.
2. Архипелаг состоит из 1000 островов, некоторые пары которых соединены мостами, причём от любого острова можно добраться по мостам до любого другого. Оказалось, что для любых четырёх островов A, B, C, D таких, что есть мост между A и B , между B и C , между C и D , также есть мост между A и C или между B и D . Докажите, что есть остров, соединённый мостами со всеми остальными.
3. Вася написал 100-значное число. Потом всеми возможными способами выбрал пару цифр, сложил цифры в каждой паре и получившиеся 4950 чисел перемножил. Мог ли Вася в результате получить исходное число?
4. При каких натуральных n число $36^n - 6$ представляется в виде произведения нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел?
5. В окружность единичного радиуса с центром O вписан правильный 2025-угольник, его вершины раскрашены в красный, синий и зелёный цвета. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами в трёх разноцветных вершинах многоугольника, содержащий точку O .
6. Миша умножил корень уравнения $lx^2 + tx + t = 0$ на корень уравнения $lx^2 + lx + t = 0$ и получил 1. Что это были за корни?

Серия №4. Олимпиады и задачи

4 июля

1. На олимпиаде было больше одного участника и больше одной задачи. Все участники решили разное число задач. Каждая задача была решена разным количеством участников. Докажите, что какой-то участник решил ровно одну задачу.
2. На одном турнире командам была предложена олимпиада из 8 задач. Выяснилось, что каждая команда решила ровно 3 задачи. При этом любые две команды решили на двоих не менее 5 задач. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в турнире?
3. 17 участников олимпиады решали 9 задач. Каждую задачу решили ровно по 11 участников. Докажите, что найдутся 2 таких участника, что каждая из 9 задач решена хотя бы одним из них.
4. На олимпиаде было 50 участников. Каждый из них решил больше половины от всех задач. Докажите, что можно выбрать не более 5 задач таких, что каждый участник решил хотя бы одну из них.
5. На олимпиаде было m участников и $2n + 1$ задач. Известно, что для любых 2 задач не более k школьников их одновременно решили/не решили. Докажите, что $\frac{k}{m} \geq \frac{n}{2n+1}$.
6. На олимпиаде было 50 участников и 8 задач. Участники сдали 171 правильное решение. Докажите, что найдутся 3 задачи и 3 участника, которые одновременно их решили.
7. На олимпиаде было нечётное число школьников и 20 задач. Каждый школьник решил ровно 7 задач. При этом оказалось, что для любого школьника ровно половина из остальных не решили с ним ни одной общей задачи. Какое наибольшее количество школьников могло участвовать в олимпиаде?

Серия №5. Суммы

4 июля

1. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы одного или нескольких различных членов последовательности Фибоначчи, при этом в сумме не должны участвовать соседние члены последовательности Фибоначчи.
2. Дана неубывающая последовательность положительных чисел a_i такая, что каждый ее член (начиная со второго) не превосходит удвоенного предыдущего члена. Докажите, что для любого n в сумме $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ можно так выбрать знаки, чтобы выполнялось неравенство $0 \leq S \leq a_1$.
3. Даны такие натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n , что ни одно из них не превосходит своего номера, а сумма всех их чётна. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы с одинаковой суммой.
4. В каждой вершине правильного 2025-угольника написано целое число. Сумма всех написанных чисел равна 1. Докажите, что можно так выбрать вершину и занумеровать все вершины от нее по порядку по часовой стрелке $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ так, чтобы для любого $k < 2025$ сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ была положительной.
5. Последовательность x_i строится по следующему правилу:
$$x_n = x_{n-1} + \frac{3^{k+1}-1}{2}, \text{ если } n \text{ представимо в виде } 3^k(3m+1),$$
$$x_n = x_{n-1} - \frac{3^{k+1}+1}{2}, \text{ если } n \text{ представимо в виде } 3^k(3m+2),$$
$$x_0 = 0.$$
Докажите, что каждое целое число встретится в последовательности ровно 1 раз.
6. Натуральное число назовём белым, если в его троичной записи используются только цифры 0 или 1, синим – если в его четверичной записи используются только цифры 0 или 1, красным – если в его пятеричной записи используются только цифры 0 или 1. Докажите, что каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы белого, синего и красного числа. Например, $2025 = 3^6 + 3^5 + 3^1 + 4^5 + 1 + 5^2 = 1100010_3 + 100001_4 + 100_5$.
7. Дано натуральное k . Докажите, что любое целое число n может быть представлено в виде алгебраической суммы попарно различных точных k -ых степеней.

Серия №6. Разнобой – 2

4 июля

1. При каких натуральных n можно разрезать произвольный треугольник на n трапеций равной площади?
2. При каких натуральных n можно отметить на плоскости n точек так, чтобы для любой отмеченной точки (назовём её T) нашлась окружность, внутри (включая границу) которой будут все остальные отмеченные точки, T – снаружи, а центр этой окружности будет отмеченной точкой?
3. В компании из 100 человек среди любых 50 есть одно и то же (ненулевое) количество пар знакомых. Какое наименьшее количество пар знакомых может быть среди всех 100?
4. Даны положительные рациональные числа a, b и c . Они удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + 2abc + ab = abc^2$. Докажите, что $\frac{c-3}{c+1}$ – квадрат рационального числа.
5. Может ли точный квадрат иметь поровну натуральных делителей вида $3k, 3k + 1$ и $3k + 2$?
6. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$. На сторонах CD и DA выбраны точки E и F соответственно таким образом, что $\angle FBE = 75^\circ$. Докажите, что $AB + AF + CE > EF$.

Серия №7. Массы в массы!

5 июля

Теория

1. На плоскости даны точки A_1, A_2, \dots, A_n , каждой точке присвоено число m_1, m_2, \dots, m_n соответственно, причем $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$. От произвольной точки плоскости O отложим вектор $\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$. Докажите, что:
 - а) положение точки Z не зависит от выбора точки O ;
 - б) существует единственная точка O , для которой этот вектор нулевой.

Определение. Такая точка называется центром масс системы точек A_1, A_2, \dots, A_n . Числа m_1, \dots, m_n называются массами соответствующих точек.

2. Выберем точки A_i, A_j такие, что $m_i + m_j \neq 0$. Найдите расположение их центра масс. Рассмотрите случаи с массами одного и разных знаков.
3. Удалим из системы произвольный набор точек с ненулевой суммой масс, заменив их одной точкой, совпадающей с центром масс удаленных точек, и сопоставив ей сумму масс удаленных точек. Докажите, что центр масс всей системы точек не изменится.

Теорема о группировке масс. Положение центра масс не зависит от порядка группировки масс.

4. а) Докажите, что если точку B_{ij} массой $m_i + m_j \neq 0$ заменить на две точки A_i и A_j (из задачи 2), то центр масс системы не изменится.
 б) Докажите, что если точку B с массой 0 заменить на две точки A и A^* , совпадающие с B , присвоив им массы m и $-m$ соответственно, то центр масс системы не изменится.

Практика

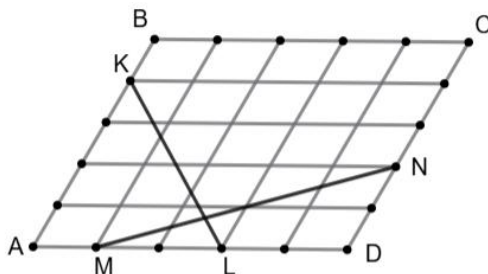
Основной метод. Если ввести несколько точек с массами и сгруппировать их так, чтобы получилось 2 точки, то центр масс всей системы будет лежать на прямой, проходящей через них. Сгруппировать в 2 другие точки – центр масс снова лежит на прямой, отличной от первой. Но центр масс единственный, значит, это их точка пересечения!

5. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1 . В каком отношении делит эта прямая медиану CC_1 ?

Задачи

6. Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой; M и N – середины отрезков AB и CD ; K – середина отрезка MN ; P – точка пересечения медиан треугольника BCD . Докажите, что точки A, K, P лежат на одной прямой.
7. а) На сторонах AC и AB отмечены точки B_1 и C_1 такие, что $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AC_1}{C_1B} = k$. Докажите, что медиана AA_1 , а также BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
 б) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
 в) Две биссектрисы внешних углов треугольника и биссектриса третьего угла пересекаются в одной точке.

8. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и CD взяты точки M и N так, что $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{ND}$. Докажите, что центр масс треугольника AMN лежит на диагонали BD .
9. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке. В каком отношении они делятся точкой пересечения?
- 10.а) Поставьте в 3 вершины параллелограмма массы так, чтобы их центр масс оказался в четвёртой вершине.
б) Поставьте в точки A, B, C, D целочисленные массы так, чтобы центр масс всей системы оказался пересечением отрезков KL и MN , и найдите отношения, в которых эти отрезки делятся их точкой пересечения.



Указание: в точку C поставьте массу 0 и разгруппируйте (по пункту 4б).

Следующие 2 задачи принимаются исключительно через группировку масс.

11. **Теорема Менелая.** На сторонах BC, AC и продолжении стороны AB треугольника ABC отмечены точки K, L, M соответственно. Точки K, L, M коллинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$.
12. **Теорема Гаусса.** В треугольнике ABC проведены чевианы AD и BE , которые пересекаются в точке P . Докажите, что середины отрезков AB, CP, DE лежат на одной прямой.
13. В треугольнике ABC проведены чевианы AD, BE, CF , которые пересекаются в точке P . Докажите, что три прямые Гаусса (для каждой пары чевиан) пересекаются в одной точке, лежащей на PM , где M – точка пересечения медиан треугольника ABC .

Серия №8. Усреднение

5 июля

1. На кольцевой дороге длины 25 через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что полицейские могут перейти на требуемые места, пройдя в сумме расстояние, не большее 156.
2. В графе на 16 вершинах 2025 ребер (кратные ребра разрешены). Посчитайте среднее количество ребер среди подграфов на 6 вершинах. Верно ли, что в этом графе обязательно найдется 6 вершин, между которыми суммарно проведено не меньше, чем 254 ребра?
3. В клетках шахматной доски стоят плюсы и минусы, причем плюсов и минусов поровну (32 штуки). Докажите, что можно расставить 8 ладей, не бьющих друг друга так, чтобы не менее 4 ладей стояли на плюсах.
4. а) Докажите, что в произвольном графе можно раскрасить вершины в два цвета таким образом, чтобы не менее половины ребер оказались разноцветными.
б) Граф G содержит $2n$ вершин и m ребер. Докажите, что он содержит двудольный подграф с не менее чем $\frac{mn}{2n-1}$ ребрами.
5. Докажите, что для любого натурального n существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором хотя бы $\frac{(n-1)!}{2^n}$ гамильтоновых циклов.
6. У инженера Саши есть 99 лампочек и 50 переключателей. Каждая из лампочек подсоединена ровно к 25 переключателям. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные – включаются, включенные – выключаются. Докажите, что Саша может нажать на такие 17 переключателей, что хотя бы 50 лампочек окажутся включенными. Начальное состояние лампочек произвольное.
7. По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему. (Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные).
8. Пусть p – простое число, а числа a_1, \dots, a_p – целые. Докажите, что существует целое число k , такое, что числа $a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + kp$ дают не менее $\frac{p}{2}$ различных остатков по модулю p .

Серия №9. Балансировка коэффициентов
7 июля

Пример

1. Пусть $a, b > 0$ и $a^2 + b^2 = 1$. Найдите минимум выражения

$$a + b + \frac{1}{ab}.$$

Задачи

2. Для положительных a, b, c верно соотношение $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите максимум выражения $ab + \sqrt{3}bc$.

3. Пусть $a, b, c, t > 0$ и $ab + bc + ac = 1$. Найдите минимум выражения

а) $4a^2 + 4b^2 + c^2$.

б) $ta^2 + tb^2 + c^2$.

4. Пусть $a, b, c, d > 0$ и $ab + bc + cd + da = 1$. Найдите минимум выражения

$$5a^2 + 4b^2 + 5c^2 + d^2.$$

5. Найдите наибольшее $k > 0$ такое, что для любых положительных x, y, z таких, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и выполняется неравенство

$$kxy + yz \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

6. Пусть $w, x, y, z > 0$. Найдите максимум выражения

$$\frac{wx + xy + yz}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

7. Пусть $x + y + z = 3$. Найдите минимум выражения

$$x^2 + y^2 + z^3.$$

Серия №10. Бесконечность

7 июля

1. Найдутся ли:
 - а) сколь угодно много последовательных составных чисел?
 - б) бесконечно много последовательных составных чисел?
2. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.
- Лемма.** Если бесконечное множество разбито на конечное число подмножеств, то хотя бы одно из подмножеств – бесконечно.
3. Дана бесконечная числовая последовательность. Для любого n сумма n первых членов последовательности больше n . Докажите, что в последовательности бесконечно много положительных членов.
4. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста, причём рост каждого составляет натуральное число сантиметров. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.
5. Имеется таблица из трёх строк и бесконечного числа столбцов. В каждой клетке таблицы стоит натуральное число. Доказать, что можно так выбрать два столбца в таблице, что в каждой из строк число, стоящее в первом столбце будет не меньше числа, стоящего во втором столбце.
6. Множество натуральных чисел разбито на конечное число непересекающихся подмножеств. Докажите, что среди них можно выбрать подмножество S такое, что для любого натурального n множество S содержит бесконечно много чисел, кратных n .
7. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.
8. На планете счетное множество городов, и любые два соединены либо автомобильной дорогой, либо железной дорогой, либо авиалинией, либо морским путём. Докажите, что можно выбрать некоторое бесконечное подмножество городов так, что все пары выбранных городов связаны одним и тем же способом.

Определение. Бесконечное множество называется счётным, если все его элементы могут быть пронумерованы натуральными числами (т.е. существует биекция с \mathbb{N} .)

9. Пусть A_1, A_2, A_3, \dots – бесконечная последовательность конечных множеств. Известно, что для любого конечного набора множеств из этой последовательности можно так выбрать по одному элементу из каждого множества, что все эти элементы будут попарно различны. Докажите, что из каждого множества всей последовательности можно выбрать по одному элементу, чтобы все эти элементы были попарно различны.

Серия №11. Векторы – 2

7 июля

1. Дана точка O , прямая l , не проходящая через O , и различные точки $P_1, P_2, \dots, P_{2025}$, лежащие на прямой l . Можно ли нарисовать 2025-звенную замкнутую ломаную такую, что для каждого отрезка OP_i нашлось бы параллельное и равное ему звено ломаной?
2. Дано $2n$ векторов на плоскости, причем набор векторов нельзя разбить на 2 части с одинаковой длиной суммы. Двое по очереди берут себе по одному вектору. Выигрывает тот, у кого длина суммы его векторов будет больше. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или его противник?
3. На сторонах многоугольника, вписанного в окружность диаметра 1, расставлены стрелки. Докажите, что длина суммы полученных векторов не превосходит 2.
4. Через точку O проходит прямая l . Из точки O проведены 2025 единичных векторов, лежащих в одной полуплоскости относительно l . Докажите, что длина их суммы больше 1.
5. Даны несколько векторов, длины которых не превосходят 1. Докажите, что, умножив некоторые из них на -1 , можно добиться того, чтобы длина суммы всех векторов не превосходила $\sqrt{2}$.
6. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать один или несколько векторов, длина суммы которых больше 1.
7. На окружности с центром O и радиусом 1 лежат 100 точек P_1, P_2, \dots, P_{100} . Известно, что каждый угол $\angle P_i O P_{i+1}$ ориентирован по часовой стрелке и принадлежит отрезку $[90^\circ; 180^\circ]$. Найдите максимально возможную длину вектора $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{100}}$.

Серия №12. Раскраски вершин

8 июля

Определение. Раскраска вершин графа в несколько цветов называется правильной, если концы любого ребра покрашены в разные цвета.

1. а) Пусть в графе степени всех вершин не превосходят числа d . Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в $d + 1$ цвет.
б) Пусть в связном графе степени всех вершин не превосходят числа d , и есть хотя бы одна вершина степени меньше d . Докажите, что его вершины можно правильно покрасить в d цветов.
2. Дан связный граф. Известно, что его невозможно правильно покрасить в k цветов. Назовем вершину *бедной*, если ее степень меньше k . Докажите, что можно из графа выделить некоторое подмножество вершин A и оставить ребра только внутри него так, что в A не будет бедных вершин.
3. Вершины некоторого графа нельзя правильным образом раскрасить в менее, чем k цветов. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин этого графа в k цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.
4. В некотором связном графе 100 вершин, причем степень каждой вершины не больше 9. Докажите, что в этом графе можно выделить 22 вершины так, чтобы любой замкнутый путь, проходящий только по выделенным вершинам, имел четную длину.
5. Дан связный граф на n вершинах. Докажите, что его вершины можно покрасить в два цвета так, чтобы количество разноцветных рёбер было больше количества одноцветных рёбер хотя бы на $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
6. Все вершины графа G имеют степень 3, v – одна из них. Известно, что граф можно правильно покрасить в 3 цвета. Докажите, что это можно сделать так, чтобы соседи вершины v не были одноцветными.
7. В графе n вершин, степень каждой из них не больше 8. Докажите, что из графа можно удалить не более n рёбер так, чтобы не осталось ни одного полного подграфа на 4 вершинах.

Серия №13. Суммы квадратов. Конструктивы

8 июля

1. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде $a^2 + b^2 + c^2 - d^2$, где a, b, c, d – натуральные числа.
2. Докажите, что для любых целых a и b разной четности найдется такое c , что $c + ab$, $c + a$, $c + b$ – точные квадраты.
3. Для различных натуральных чисел a, b, c, d известно, что $abcd$ – точный квадрат. Докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ можно представить в виде суммы пяти точных квадратов натуральных чисел.
4. Число n является суммой трех квадратов натуральных чисел. Докажите, что число n^2 тоже является суммой трех квадратов натуральных чисел.
5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что n является суммой двух квадратов целых чисел, а числа $n - 1$ и $n + 1$ – не являются.
6. Докажите, что существует бесконечно много троек последовательных натуральных чисел таких, что каждое из них является суммой двух квадратов натуральных чисел.
7. Докажите, что существует бесконечно много четверок взаимно простых в совокупности натуральных чисел a, b, c, d таких, что $ab + bc + ac$, $ab + bd + ad$, $ac + ad + cd$, $bc + bd + cd$ – точные квадраты.

Серия №14. Суммы квадратов – 2. Теоремы

9 июля

Вспоминаем: Малая теорема Ферма, теорема Вильсона, принцип Дирихле :)

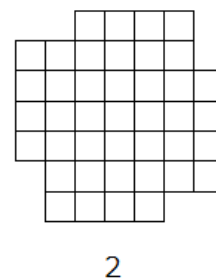
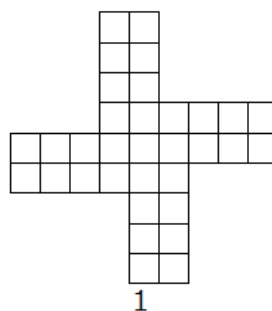
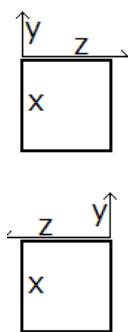
1. а) Докажите, что если $x^2 + y^2$ делится на простое число $p = 4k + 3$, то числа x и y делятся на p .
 б) Докажите, что в разложение на простые множители числа вида $x^2 + y^2$ простое число $p = 4k + 3$ обязательно входит в четной степени (возможно, нулевой).
2. Докажите, что если простое число $p = 4k + 1$, то существует такое b , что $b^2 + 1 \div p$.
3. **Рождественская теорема Ферма.** Пусть простое число $p = 4k + 1$, и b – целое число, такое, что $b^2 + 1 \div p$.
 а) Докажите, что найдутся пары остатков $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ такие, что $0 \leq x_i, y_i \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ и $x_1 - by_1 \equiv x_2 - by_2 \pmod{p}$.
 б) Докажите, что найдется пара остатков (x, y) такая, что $0 \leq x, y \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor$, и при этом $x \equiv \pm by \pmod{p}$.
 в) Докажите, что найдется пара остатков (x, y) такая, что $x^2 + y^2 = p$.
4. а) Докажите, что произведение двух натуральных чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел, тоже является суммой квадратов двух целых чисел.
 б) **Теорема Ферма-Эйлера.** Натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда каждый простой делитель вида $4k + 3$ входит в его разложение в четной степени.
5. а) Пусть p – нечётное простое число. Докажите, что существует ровно $\frac{p+1}{2}$ таких остатков a , для которых найдется x такой, что $x^2 \equiv a \pmod{p}$.
 б) Докажите, что найдётся четверка чисел a, b, c, d такая, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \div p$ и при этом не все числа a, b, c, d делятся на p .
 в) Пусть m – минимальное натуральное число, для которого существуют a, b, c, d такие, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = mp$. Докажите, что $m \leq p - 1$.
 г) Докажите, что если бы $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = mp$ было чётным числом, то $\frac{mp}{2}$ тоже бы являлось суммой четырёх точных квадратов целых чисел.
 д) Докажите, что найдутся такие x, y, z, w , что $a - x \equiv b - y \equiv c - z \equiv d - w \equiv 0 \pmod{m}$ и $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = mn$, где $0 < n \leq m - 1$.
 е) Докажите, что произведение двух натуральных чисел, представимых в виде суммы четырёх квадратов целых чисел, является суммой квадратов четырёх целых чисел.
 ж) Докажите, что $mp \cdot mn$ является суммой четырёх квадратов, делящихся на m^2 .
 з) Докажите, что $m = 1$.
 и) **Теорема Лагранжа.** Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы четырёх квадратов целых чисел.
6. Докажите, что числа вида $n = 4^m(8k + 7)$ не представимы в виде суммы трёх квадратов.
 PS. **Теорема Лежандра** утверждает, что все остальные натуральные числа

представимы в виде суммы трёх квадратов, но мы не будем её доказывать.

7. Еще одно доказательство рождественской теоремы Ферма.

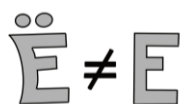
Рассмотрим число p вида $4k + 1$ и представим его в виде $p = x^2 + 4yz$, где x, y, z – натуральные числа. Такие представления существуют, например, $p = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot k$. Посчитаем общее количество таких представлений. По представлению (x, y, z) построим «мельницы» по схеме на картинке.

К квадрату со стороной x приставим прямоугольник высотой y и шириной z к левому верхнему углу (левая мельница) или к правому верхнему углу (правая мельница). Далее поворотом вокруг центра квадрата добавим еще 3 прямоугольника.



Например, мельница под номером 1 соответствует представлениям $33 = 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2$ (левая мельница для $(3, 3, 2)$) и $33 = 1^2 + 4 \cdot 4 \cdot 2$ (правая мельница для $(1, 4, 2)$).

- Каким представлениям какого p соответствует мельница 2?
- Докажите, что если p – простое, то мельница не может соответствовать более, чем двум представлениям.
- При простом p найдите все мельницы, которые соответствуют ровно одному представлению.
- Докажите, что при простом p общее количество мельниц нечетно.
- Докажите, что среди представлений найдется такое, что $y = z$.
- Завершите доказательство теоремы.



Добавка

8. Представим квадратный трехчлен в виде суммы квадратов нескольких линейных функций или квадратов констант. Очевидно, что полученная функция принимает только неотрицательные значения. Например,

$$(x + 2)^2 + (0,5x - 1)^2 + 2^2 = 1,25x^2 + 3x + 9 \geq 0$$

- Представьте квадратный трехчлен $3x^2 + 10x + 10$ в виде суммы квадратов.
- Докажите, что любой квадратный трехчлен с неположительным дискриминантом является суммой не более, чем двух квадратов.
- Докажите, что квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ не является суммой нескольких квадратов с целыми коэффициентами.

В следующих пунктах рассмотрим квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ с целыми коэффициентами и неположительным дискриминантом ($a, c > 0$).

- Докажите, что если $|b| \leq a, |b| \leq c$, то он является суммой нескольких квадратов с целыми коэффициентами.

д) Пусть $b \geq 0, a \leq c, a \leq b$. Докажите, что в этом случае квадратный трехчлен является суммой нескольких квадратов с целыми коэффициентами. Для этого рассмотрите трехчлен с наименьшим b , который «не является суммой квадратов».

е) А что делать в случае других знаков?

ж) Пусть $p = 4k + 1$ – простое, и $b^2 + 1 : p$. Рассмотрим $f(x) = ax^2 + 2bx + p$, где $a = \frac{b^2 + 1}{p}$. Чему равен дискриминант?

з) Пусть $f(x)$ из пункта ж) – сумма квадратов: $f(x) = (kx + l)^2 + \dots$. Докажите, что у трехчлена $f(x) - (kx + l)^2$ неположительный дискриминант.

и) Найдите четверть этого дискриминанта в виде $Dp/4p$ (на p не сокращайте!) и докажите рождественскую теорему Ферма.

Серия №15. Скалярное произведение

9 июля

Теория

Определение. Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между их направлениями, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$.

Свойства скалярного произведения

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot k\vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ (под $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$ имеется в виду длина проекции вектора \vec{b} на вектор \vec{a} с учетом знака)
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

1. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ перпендикулярны, то длины векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} равны.
2. Докажите, что если AB и CD – диаметры некоторой окружности с центром O , а E – произвольная точка, то $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}$.
3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Задачи

4. Для произвольных точек докажите равенство $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
5. Правильный многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром O , точка X – произвольная. Докажите, что:

$$A_1X^2 + A_2X^2 + \dots + A_nX^2 = n(R^2 + OX^2)$$

6. Точки M и N – середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что:

$$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2$$

7. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC . Точки M и N – середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.
8. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) точка D – середина стороны AB , O – центр описанной окружности, M – точка пересечения медиан треугольника ACD . Докажите, что $OM \perp CD$.
9. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.
10. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P . Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD , пересекаются в точке Q . Докажите, что $PQ \perp AB$.

Серия №16. Иррациональности

10 июля

1. Известно, что a, b, c, d – рациональные числа, и при этом $a + b\sqrt{7} = c + d\sqrt{7}$. Докажите, что тогда $a = c$ и $b = d$.
2. Иррациональны ли числа:
 - а) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$,
 - б) $\sqrt{5\sqrt{2} - 1} + (\sqrt{2} - 3)\sqrt{\sqrt{2} + 1}$,
 - в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$?
3. Целые числа m, n таковы, что $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n}$ – целое число. Верно ли, что оба слагаемых – целые числа?
4. Существуют ли такие попарно различные целые числа a, b, c , не являющиеся точными квадратами, что $a + b\sqrt{c} = b + c\sqrt{a}$?
5. При каких натуральных n число $(\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n$ будет целым? Будет ли оно четным?
6. Четно или нечетно число $[(45 + \sqrt{2026})^{100}]$?
7. Существуют ли такие целые числа $m, n \geq 1$, что $(5 + 3\sqrt{2})^n = (3 + 5\sqrt{2})^m$?
8. На калькуляторе можно делать одну из трёх операций: находить сумму двух чисел, находить разность двух чисел, находить число, обратное данному (не к нулю, естественно). Также можно запоминать результаты любого количества вычислений, но вносить в память другие числа запрещено. Изначально в памяти калькулятора есть два числа: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Можно ли на этом калькуляторе получить какое-нибудь целое число, отличное от нуля? Калькулятор не округляет.
9. Изначально на доску выписали числа $1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x, y и z , а вместо них на доску записываются числа $x^2 + xy + y^2, y^2 + yz + z^2$ и $x^2 + xz + z^2$. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными?

Серия №17. Квадратичные вычеты

12 июля

Теория

Пусть p – нечетное простое число. Рассмотрим уравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$.

Определение. Если для $a \neq 0$ существует решение уравнения, то число a называется квадратичным вычетом по модулю p . В противном случае a – квадратичный невычет.

1. Докажите, что среди ненулевых остатков по модулю p ровно половина являются квадратичными вычетами.
2. Докажите следующие свойства произведений квадратичных вычетов:
 - а) вычет \times вычет = вычет;
 - б) вычет \times невычет = невычет;
 - в) невычет \times невычет = вычет.

Определение. Символом Лежандра называют выражение $\left(\frac{a}{p}\right)$, причем:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } a - \text{кв. вычет} \\ -1, & \text{если } a - \text{кв. невычет} \\ 0, & \text{если } a \equiv_p 0 \end{cases}$$

Заметим, что в 2 задаче мы доказали свойство $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$ при $a, b \neq 0$.

3. а) Докажите, что если $a \neq 0$ – квадратичный вычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.
 б) Докажите, что если a – квадратичный невычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Критерий Эйлера. Если p – нечетное простое число, то:

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv_p a^{\frac{p-1}{2}}$$

4. Для остатка $a \neq 0$ рассмотрим множество остатков $A = \left\{a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a\right\}$. Пусть n – количество остатков в A , больших $\frac{p}{2}$.
 - а) Докажите, что если в A каждый из остатков $k > \frac{p}{2}$ заменить на $p - k$, то полученное множество B совпадает с множеством $\left\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$.
 - б) Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p (-1)^n$.

Критерий Гаусса. Если p – нечетное простое число, a не делится на p , то:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n$$

Задачи

5. Вычислите без калькулятора $\left(\frac{3}{41}\right)$ и $\left(\frac{3}{47}\right)$, выбрав наиболее удобный критерий.

6. Докажите, что при любом нечетном простом p найдется такое натуральное число x , что произведение $(x^2 - 13)(x^2 - 17)(x^2 - 221)$ делится на p .
7. Пусть p – нечетное простое, a не делится на p . Докажите, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0$ имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант D является квадратичным вычетом по модулю p .
8. Пусть p – простое число. Докажите, что найдется такое число k , что $k^8 \equiv 16 \pmod{p}$.
9. Пусть $p = 4k + 1$ – простое, $p > 5$. Докажите, что найдутся такие квадратичные невычеты a, b, c (возможно, одинаковые), что $a \equiv b + c \pmod{p}$.

Серия №18. Гамильтонов путь и цикл

12 июля

Определение. Гамильтонов путь – простой путь (без повторения вершин и рёбер), проходящий по всем вершинам. Гамильтонов цикл – простой цикл по всем вершинам.

1. Минимальная степень вершины в графе равна $k \geq 2$. Докажите, что в этом графе есть:
 - а) простой путь, содержащий не менее k рёбер;
 - б) простой цикл, содержащий не менее $k + 1$ рёбер.
2. Максимальный простой путь в графе содержит k рёбер. Пусть вершины A и B соединяет один из таких путей. Докажите, что если суммарная степень вершин A и B больше k , то в графе есть простой цикл из $k + 1$ ребра.
3. **Теорема Оре.** Пусть в графе n вершин.
 - а) Известно, что суммарная степень любых двух несоседних вершин не меньше $n - 1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
 - б) Известно, что суммарная степень любых двух несоседних вершин не меньше n . Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.
4. **Теорема Дирака.** Пусть в графе n вершин.
 - а) Если минимальная степень вершины в графе не меньше $\frac{n-1}{2}$, то в графе есть гамильтонов путь.
 - б) Если минимальная степень вершины в графе не меньше $\frac{n}{2}$, то в графе есть гамильтонов цикл.
5. а) Пусть в графе n вершин и m рёбер, причем $2m \geq n^2 - 3n + 6$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.
 б) Какое максимальное число рёбер может быть в графе с n вершинами, в котором нет гамильтонова пути?
6. Пусть в графе $2n$ вершин, причем степень первой вершины равна 1, второй – 2, третьей – 3, ..., $(2n - 1)$ -ой – $(2n - 1)$. Сколько в этом графе гамильтоновых путей, начинающихся с первой вершины?
7. Дан двудольный граф, содержащий по n вершин в каждой доле. Степень каждой вершины больше $\frac{n}{2}$. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
8. На планете M стран и N городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними дорогами. При этом выполняются 5 условий:
 - 1) В каждой стране как минимум 3 города;
 - 2) Если в стране k городов, то каждый город в ней соединён как минимум с $\frac{k}{2}$ другими городами этой страны;
 - 3) Каждый город соединён ровно с одним городом за пределами своей страны;
 - 4) Между любыми двумя странами проходит не больше двух дорог;
 - 5) Если в двух странах в сумме менее $2M$ городов, то они точно соединены дорогой.
 Докажите, что есть простой цикл из не менее чем $M + \frac{N}{2}$ городов.

Серия №19. Гомотетия и конструкции

12 июля

Определение. Гомотетия с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ – это преобразование плоскости H_O^k , которое каждую точку M плоскости переводит в точку M_1 такую, что $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Свойства

- Точка, её образ и центр гомотетии лежат на одной прямой.
- Вектор \overrightarrow{AB} переходит в вектор $k \cdot \overrightarrow{AB}$, и все расстояния умножаются на $|k|$.
- Прямая переходит в параллельную прямую, окружность – в окружность.

1. Теорема о 4 точках трапеции. Середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Задачи

- Стороны двух неравных треугольников параллельны друг другу. Докажите, что существует центр гомотетии, переводящей один из них в другой.
- Лемма Архимеда.** Две окружности касаются друг друга в точке A . Некоторая прямая касается первой окружности в точке D и пересекает вторую окружность в точках B и C . Докажите, что прямая AD проходит через середину дуги BC второй окружности.
- Окружность Эйлера.** Дан треугольник ABC . Точка H – ортоцентр, точка O – центр описанной окружности. Докажите, что в треугольнике ABC основания высот, середины сторон, середины отрезков AH , BH , CH лежат на одной окружности, центр которой лежит на середине отрезка OH .
- а) В треугольнике ABC вписанная и невписанная окружности касаются стороны BC в точках M и N соответственно. MP – диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A , P , N лежат на одной прямой.
 б) Пусть I – центр вписанной окружности, E – середина высоты AH треугольника ABC . Докажите, что точки E , N , I лежат на одной прямой.
 в) Пусть I_A – центр невписанной окружности, касающейся BC . Докажите, что точки E , M , I_A лежат на одной прямой.
- Прямая Симсона.** На меньшей дуге AB описанной окружности треугольника ABC отмечена точка D . Из точки D на прямые AC , BC опущены перпендикуляры DX , DY . Точка H – ортоцентр треугольника ABC . Высоты AH и BH пересекают описанную окружность в точках P и Q . Точки M и N таковы, что X – середина MH , Y – середина NH . Докажите, что:
 а) $\triangle MDX = \triangle XDQ$, $\triangle NDY = \triangle DYP$.
 б) Точки M , D , N лежат на одной прямой.
 в) Прямая Симсона точки D относительно треугольника ABC (прямая XY) делит отрезок DH пополам – в точке, лежащей на окружности Эйлера.
- Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB , AC , BC в точках K , L ,

M соответственно, I – центр вписанной окружности. Прямые KL и MI пересекаются в точке X . Докажите, что прямая AX проходит через середину стороны BC .

8. **Полувписанная окружность.** Дан треугольник ABC , вокруг него описана окружность ω . Точка S – середина дуги ABC окружности ω . Окружность ω_1 касается внутренним образом окружности ω в точке T , а также сторон AB и BC в точках K и L . Биссектриса угла BAC пересекает прямую KL в точке I . Докажите, что:
- Точки T, A, K, I лежат на одной окружности.
 - $\angle AIT = \angle ILT$.
 - I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC .
 - $IK = IL$.
 - Точки T, I, S лежат на одной прямой.
9. **Композиция гомотетий.** Даны две точки O_1 и O_2 . Вне прямой O_1O_2 выбирается точка A . Пусть $H_{O_1}^{k_1}(A) = B$ и $H_{O_2}^{k_2}(B) = C$. Числа k_1 и k_2 фиксированы. Докажите, что:
- Если $k_1k_2 \neq 1$, то прямая AC пересекает прямую O_1O_2 в точке O , не зависящей от выбора точки A .
 - $\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OA}} = k_1k_2$.
 - Композиция двух гомотетий с различными центрами O_1 и O_2 и коэффициентами k_1, k_2 является либо гомотетией с коэффициентом k_1k_2 (в случае, если это произведение не равно 1) и центром, лежащим на прямой O_1O_2 , либо параллельным переносом на вектор, параллельный O_1O_2 .
 - Теорема Монжа.** Для трёх произвольных окружностей, каждая из которых не лежит целиком внутри другой, точки пересечения общих внешних касательных к каждой паре окружностей лежат на одной прямой.

Серия №20. Многочлены. Теорема Безу

13 июля

Определения. Многочлен – это выражение вида $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, коэффициенты которого принадлежат некоторому числовому множеству K . Пишут $P(x) \in K[x]$.

Теорема (определение) о делении с остатком. Для многочленов $A(x)$ и $B(x) \neq 0$ существуют единственные* многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что выполняется равенство $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$, причём $\deg B(x) > \deg R(x)$. Если же $R(x) \equiv 0$, то $A(x)$ делится на $B(x)$.

*Для этого нужно, чтобы в K было определено деление и не было делителей нуля, т.е. таких $a, b \neq 0$, что $ab = 0$.

Теорема Безу. Даны многочлен $P(x)$ и число a . Тогда многочлен $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$, причём $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$.

Следствие. Если a – корень $P(x)$, то его можно представить в виде $P(x) = (x - a)Q(x)$.

Следствие 2. Многочлен степени n имеет не более n различных корней*.

Следствие 3. Если многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, то корни $Q(x)$ являются и корнями $P(x)$.

Задачи

1. Найдите, при каких a и b многочлен $x^{10} + ax^2 + bx + 1$ делится на $x^2 - 1$.
2. Найдите все целые x , при которых число $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ делится на $x^2 + 1$.
3. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x^n) : x - 1$. Докажите, что тогда $P(x^n) : x^n - 1$.
4. Найдите все натуральные n, k и простые p такие, что $n^5 + 2n + 3 = p^k$.
5. Про многочлен $P(x)$ степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1) = P(-1), \dots, P(5) = P(-5)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$ для любого x .
6. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет три различных корня в интервале $(0; 2)$. Докажите, что тогда $-2 < p + q + r < 0$.
7. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2025$, корней не имеет. Докажите, что $P(2025) > \frac{1}{64}$.
8. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I – неотрицательны. Докажите, что найдётся такая точка x_0 , что $P(x_0) < Q(x_0)$.

Серия №21. Поворотная гомотетия

13 июля

Определение. Поворотная гомотетия – композиция поворота и гомотетии с общим центром. Порядок выполнения преобразований может быть любым: $R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha$.

- Вектор \overrightarrow{AB} переходит в вектор \overrightarrow{CD} , повернутый на угол α (при $k > 0$) или $\alpha + 180^\circ$ (при $k < 0$), а его длина умножается на $|k|$.
 - Сохраняется форма фигур: прямая переходит в прямую, окружность – в окружность, сохраняются отношения отрезков, углы, параллельность.
1. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC . Точки M и N – середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.
 2. **Лемма.** Два треугольника XAB и XA_1B_1 получаются друг из друга поворотной гомотетией с центром в X . Тогда и два треугольника XAA_1 и XBB_1 получаются друг из друга поворотной гомотетией с тем же центром.

Задачи

3. **Поворотная гомотетия и окружности.** Две окружности с центрами P и Q пересекаются в точках A и B . Некоторая прямая, проходящая через A , вторично пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что:
 - а) треугольники BPQ и BCD подобны;
 - б) поворотная гомотетия с центром B , переводящая C в D , заодно переводит и первую окружность во вторую;
 - в) любая точка, лежащая на первой окружности, её образ и точка A коллинеарны.
4. Пользуясь предыдущей задачей, расскажите, как построить центр поворотной гомотетии, переводящей направленный отрезок \overrightarrow{CD} в $\overrightarrow{C_1D_1}$.
5. Треугольник ABC перевели поворотом в треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 либо образуют треугольник, подобный треугольнику ABC , либо совпадают.
6. Квадраты $ABCD$ и $AXYZ$ одинаково ориентированы. Докажите, что прямые BX , CY и DZ пересекаются в одной точке.
7. Две окружности пересекаются в точках A и B , а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$. Пусть P – середина отрезка BN , а Q – середина отрезка MC . Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.
8. На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' – центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X . Докажите, что точки A , X , I , D лежат на одной окружности.
9. **Точка Микеля.** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AD и BC пересекаются в точке P , лучи BA и CD пересекаются в точке Q . Докажите, что:
 - а) Описанные окружности треугольников ABP , CDP , BCQ , ADQ имеют общую точку

M (точка Микеля).

б) Докажите, что центры окружностей из пункта A , а также точка M лежат на одной окружности.

в) Докажите, что основания перпендикуляров из точки Микеля на стороны четырёхсторонника лежат на одной прямой.

г) Докажите, что прямая из пункта в) перпендикулярна прямой Гаусса, проходящей через середины AC , BD и PQ .

д) Докажите, что если $ABCD$ вписан, то M лежит на прямой PQ .

е) Докажите, что если $ABCD$ вписан в окружность с центром O , то четырёхугольники $MDOB$ и $MAOC$ вписаны, а MO – общая биссектриса углов BOD и AOC .

ж) Докажите, что если $ABCD$ вписан, а его диагонали пересекаются в точке R , то OR перпендикулярно PQ .

Серия №22. Квадратичные (не)вычеты – 2.

14 июля

Вспоминаем листочки «Суммы квадратов – 2» и «Квадратичные вычеты»

Задачи

1. Найдите $\left(\frac{-1}{p}\right)$ и заново сдайте задачи 1а) и 2 с «Суммы квадратов – 2»:
1а) Если $x^2 + y^2$ делится на простое число $p = 4k + 3$, то числа x и y делятся на p .
2) Если простое число $p = 4k + 1$, то существует такое b , что $b^2 + 1 \div p$.
2. Решите в целых числах уравнение:
$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 4c^2 + (2c + 1)^2$$
3. Докажите, что простых чисел каждого из видов $4k + 3$ и $4k + 1$ бесконечно много.
4. Решите уравнение в целых числах: $x^3 + 7 = y^2$.
5. Решите уравнение в натуральных числах: $4xy - x - y = z^2$.
6. Вспомните критерий Гаусса и вычислите $\left(\frac{2}{p}\right)$ для каждого нечетного простого p .
7. Докажите, что у числа $2^n + 1$ не может быть простых делителей вида $8k + 7$.
8. Докажите, что простых чисел каждого из видов $8k + 3$, $8k + 5$ и $8k + 7$ бесконечно много.
9. Докажите, что число 2 является квадратичным вычетом по модулю 7^n при любом натуральном n .

Серия №23. (He) счётность

14 июля

Определение. Бесконечное множество называется счётным, если все его элементы могут быть пронумерованы натуральными числами (т.е. существует биекция с \mathbb{N}).

Лемма. В любом непустом подмножестве натуральных чисел есть наименьший элемент.

1. а) Докажите, что множество четных чисел счётно.
б) Докажите, что множество целых чисел счётно.
2. Докажите, что у счётного множества любое бесконечное подмножество тоже счётно.
3. Докажите, что объединение нескольких счётных множеств счётно.
4. а) Дана клетчатая доска, бесконечная вправо и вниз. Докажите, что множество её клеток счётно.
б) Докажите, что множество рациональных чисел счётно.
5. а) Докажите, что множество конечных строк из 0 и 1 счётно.
б) Докажите, что множество конечных подмножеств \mathbb{N} счётно.
6. а) На прямой отметили бесконечное число попарно непересекающихся интервалов длины 1. Докажите, что полученное множество интервалов счётно.
б) То же самое, только на этот раз интервалы произвольной длины.
7. На плоскости нарисовали бесконечное количество непересекающихся:
а) Кругов.
б) «Восьмёрок» («Восьмёрка» – объединение двух касающихся окружностей).
в) «Крестиков» («Крестик» – два перпендикулярных отрезка, пересекающихся во внутренней точке каждого).
Докажите, что их получилось счётное количество.
8. а) Дан бесконечный список бесконечных строк из 0 и 1. Как построить бесконечную строку из 0 и 1, которая гарантированно не встретится в данном списке?
б) Докажите, что множество бесконечных строк из 0 и 1 несчётно.
в) Докажите, что множество вещественных чисел на отрезке $[0; 1]$ несчётно.
г) Докажите, что множество вещественных чисел несчётно.
д) Докажите, что множество подмножеств \mathbb{N} несчётно.
9. Является ли счётным множество подмножеств \mathbb{N} , если известно, что:
а) никакие два из них не пересекаются;
б) любые два из них пересекаются не более, чем по 10 элементам;
в) любые два пересекаются не более, чем по конечному множеству;
г) среди любых двух одно является подмножеством другого?
10. Дана бесконечная шахматная доска, в каждой клетке которой стоит натуральное число (числа могут повторяться). Идя королем по доске (возможно, с повторением клеток) и выписывая по порядку числа из посещаемых клеток, мы получаем «королевскую» последовательность. Докажите, что для любой данной доски найдется некоролевская последовательность.

Серия №24. Лемма (не) Бернсайда

14 июля

1. а) Сколькими способами можно раскрасить в три цвета клетки квадрата 5×5 ?
- б) Сколько способов, если раскраски, симметричные относительно вертикальной средней линии, считаются одинаковыми?
- в) Сколько способов, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом на угол, кратный 90° , считаются одинаковыми?
- г) Сколько способов, если и повороты, и симметрии отождествляют раскраски?

Определения. Пусть X – множество раскрасок «без условий», как в пункте а). Элементы множества X будем обозначать буквой x . Пусть G – множество преобразований, которые можно делать с x (например, повороты, перевороты и т.п.). Элементы G обозначим как f, g, h . По сути, мы можем находить $f(x), g(x), g(f(x)) \in X$ и т.п. В последнем случае преобразование называется композицией, и его можно обозначить $g \circ f$.

Множество G называют группой преобразований, если оно обладает свойствами:

- а) тождественное преобразование принадлежит G ;
- б) композиция преобразований из G принадлежит G ;
- в) для каждого $g \in G$ есть обратное преобразование $f = g^{-1}$, принадлежащее G ;
- г) выполняется ассоциативность: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Множество раскрасок $T_x = \{g(x) \in X | g \in G\}$ называется орбитой элемента x .

Множество преобразований $S_x = \{g \in G | g(x) = x\}$ называется стабилизатором элемента x .

2. а) Пусть $y \in T_x$. Докажите, что $T_y = T_x$.
- б) Выберем одну раскраску x . Докажите, что S_x является группой преобразований.
- в) Пусть множество S_x содержит k элементов g_1, g_2, \dots, g_k , и f – произвольное преобразование из G . Докажите, что $f \circ g_1(x) = f \circ g_2(x) = \dots = f \circ g_k(x)$.
- г) Докажите, что все $f \circ g_i$ являются разными элементами G , хоть и для элемента x выполнены равенства.
- д) Докажите, что если $f(x) = h(x)$, то множества вида $f \circ g_i$ и $h \circ g_i$ совпадают.
- е) Докажите, что $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$.
- ж) Пусть множество T_x содержит m элементов $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$. Докажите, что тогда $|G| = |S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_m}|$.
- з) Пусть X содержит n элементов, т.е. раскрасок «без условий». Пусть Y – множество раскрасок «с условиями», т.е. множество всех орбит в X . Докажите, что тогда выполняется равенство $|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = |G| \cdot |Y|$.
- и) Пусть N_i , где $1 \leq i \leq |G|$ – это количество элементов X , переходящих в себя при преобразовании g_i . Докажите, что $|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}$.

Лемма Бернсайда. Количество различных раскрасок (орбит) равно среднему арифметическому количеств раскрасок, не меняющихся при каждом преобразовании, т.е.

$$|Y| = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}}{|G|}$$

Задачи

3. Снова решите задачу 1.
4. Из проволоки согнули равносторонний треугольник. Его стороны могут быть окрашены в один из n цветов. Сколько существует движений, переводящих треугольник в себя? Сколько существует различных раскрасок?
5. а) Сколькими способами можно раскрасить бусы из p бусинок в a цветов с точностью до поворота? (p – простое)
б) Докажите малую теорему Ферма.
6. Сколько различных бус для 40 бусинок и a цветов с точностью до поворота?
7. Сколько различных бус можно составить из 10 красных и 4 синих бусин с точностью до поворота и переворота?
8. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в 3 цвета?
9. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 3 цвета?
10. Сколькими способами можно раскрасить ребра куба в 3 цвета?
11. Сколько различных шестиугольников можно вписать в правильный 15-угольник.

Серия №25. Теорема Шаля

15 июля

Определение. Движение – преобразование плоскости, сохраняющее расстояния, т.е. для любых двух точек A и B расстояние между ними равно расстоянию между $f(A)$ и $f(B)$.

1. Лемма о 3 звездах. Даны три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, и произвольная точка X . Докажите, что тройка расстояний AX, BX, CX однозначно задаёт положение точки X .

Следствие. Любое движение однозначно задаётся образами 3 неколлинеарных точек.

2. Некоторое движение переводит данные неколлинеарные точки A, B, C в точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что можно несколькими симметриями перевести данные точки в их образы, причем трёх симметрий достаточно.

Теорема Шаля. Любое движение является композицией не более, чем трёх осевых симметрий.

3. Докажите, что:

- а) Параллельный перенос $T_{\vec{a}}$ (сокр. *translation*) на вектор \vec{a} может быть представлен композицией двух симметрий.
- б) Поворот R_O^α (сокр. *rotation*) на угол α вокруг точки O может быть представлен композицией двух симметрий.
- в) Симметрия S_a (сокр. *symmetry*) относительно прямой a ... является симметрией.

4. а) Чем является композиция трёх параллельных симметрий?

б) Чем является композиция трёх симметрий, проходящих через одну точку?

в) Докажите, что композиция трёх симметрий относительно прямых общего положения (не более двух параллельных, не все проходят через одну точку) может быть представлена в виде композиции симметрии и параллельного переноса.

г) Докажите, что описанное в пункте в) движение может быть представлено и в виде композиции симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

Определение. Скользкая симметрия $T_{\vec{a}} \circ S_b$ – композиция симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

Теорема о классификации движений. Любое движение плоскости – S, R, T или TS .

Определение. Плоскость задаётся тремя неколлинеарными точками. Порядок нумерации этих точек производится по часовой стрелке либо против часовой стрелки. Такой порядок задаёт ориентацию плоскости. Движение может сохранять либо менять ориентацию плоскости.

5. а) Докажите, что симметрия меняет ориентацию плоскости.

б) Проведите классификацию всех типов движений по количеству неподвижных точек и сохранению ориентации.

6. Композиция двух движений по теореме Шаля – это композиция до шести осевых симметрий. Но по теореме о классификации, это всё равно S, R, T или TS . Для каждой

композиции движений укажите, каким видом движения она может являться. Заполните таблицу для всех возможных случаев.

	S	R	T	TS
S	R или T			
R				
T				
TS				

7. Из бумаги вырезали два одинаковых треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ и положили их на стол, перевернув при этом один из треугольников. Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой.
8. **Теорема Ельсслева.** Коллинеарные точки A , B , C при некотором движении перешли в точки A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 лежат на одной прямой.

Серия №26. Квадратичные иррациональности

17 июля

Определение. Число $a + b\sqrt{d}$, где $a, b, d \in \mathbb{Q}$, а число d не является квадратом рационального числа, называют квадратичной иррациональностью. Пару чисел $t = a + b\sqrt{d}$ и $\bar{t} = a - b\sqrt{d}$ будем называть сопряжёнными друг к другу.

1. Любую квадратичную иррациональность можно домножить на ненулевое целое число так, что a, b, d будут целыми, и число d свободно от квадратов.
2. Докажите, что любая квадратичная иррациональность с целыми a, b, d является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.
3. Является ли число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ квадратичной иррациональностью:
 - а) с целыми коэффициентами?
 - б) с рациональными коэффициентами?
4. а) Даны натуральные числа a, b и свободное от квадратов число k , где $a^2 - kb^2 = 1$. Подберите вместо звёздочек целые числа, отличные от 0, ± 1 , чтобы для любых x, y выполнялось тождество: $(*x + *y)^2 - k(*x + *y)^2 = x^2 - ky^2$.
 б) Докажите, что если y уравнения $x^2 - ky^2 = 1$, где k свободно от квадратов, нашлось решение в натуральных числах, то таких решений бесконечно много.
5. Пусть a, b, k – числа из предыдущей задачи. Будем говорить, что квадратичная иррациональность $t = a + b\sqrt{k}$ является решением уравнения Пелля $x^2 - ky^2 = 1$.
 - а) Пусть t – решение. Чему равно $t\bar{t}$?
 - б) Пусть s, t – решения. Докажите, что ts и $t\bar{s}$ тоже решения.
 - в) Пусть $t_1 = a + b\sqrt{k}$ решение с минимально возможными натуральными a, b (такое решение называют фундаментальным). Докажите, что все целочисленные решения уравнения Пелля можно представить в виде t_1^n , где n – целое число.

Теорема. Если a, b – фундаментальное решение уравнения Пелля $x^2 - ky^2 = 1$, то все решения могут быть представлены в виде

$$x = \frac{(a + b\sqrt{k})^n + (a - b\sqrt{k})^n}{2}, y = \frac{(a + b\sqrt{k})^n - (a - b\sqrt{k})^n}{2\sqrt{k}}.$$

6. а) Пусть M, k – натуральны, k свободно от квадратов. Докажите, что найдутся натуральные x и $y < M$, такие, что $|x - y\sqrt{k}| < \frac{1}{M}$.
 б) Докажите, что найдётся такое натуральное N , что неравенство $|x^2 - ky^2| < N$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
 в) Докажите, что существует такое целое n и бесконечно много пар (x_i, y_i) таких, что $x_i^2 - ky_i^2 = n$ и $\forall i, j: x_i - x_j \div n, y_i - y_j \div n$.
 г) Рассмотрев дробь $\frac{x_i - y_i\sqrt{k}}{x_j - y_j\sqrt{k}}$, докажите, что найдутся $x, y \in \mathbb{N}$, что $x^2 - ky^2 = 1$.
7. Докажите, что при любом натуральном n найдется такое натуральное k , что выполнено равенство $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

Серия №27. Орграфы

17 июля

Определения. Орграф – граф, где вместо ребер – стрелки. Сильно связный орграф – от любой вершины до любой другой есть путь по стрелкам. Слабо связный орграф – связный, если заменить стрелки ребрами. Турнир – полный орграф.

1. Докажите, что в любом турнире на хотя бы трёх вершинах можно поменять направление не более чем одного ребра так, чтобы турнир стал сильно связным.
2. Докажите, что сильная связность орграфа равносильна следующему условию: при любом разбиении множества его вершин на два непустых подмножества A и B найдётся стрелка из вершины, содержащейся в A , в вершину, содержащуюся в B . Что в данном случае означает отсутствие сильной связности?
3. Орграф не сильно связан.
 - а) Пусть a – одна из вершин. Докажите, что можно выделить сильно связную компоненту – множество вершин A , содержащее a , что для любой вершины b из A существуют пути из a в b и из b в a , а для любой вершины c не из A это неверно.
 - б) Рассмотрим конденсацию графа – граф, где вершины соответствуют сильно связным компонентам, а стрелки – направлению стрелок между этими компонентами. Докажите, что конденсация не содержит циклов.
4. В орграфе $2n$ вершин, причем степени исхода и захода каждой вершины больше 0. Докажите, что в граф можно добавить не более n стрелок так, что граф станет сильно связным. Можно проводить более одной стрелки между двумя вершинами.
5. **Теорема Муна.** Пусть дан сильно связный турнир на n вершинах и натуральное число k , где $3 \leq k \leq n$. Тогда:
 - а) есть цикл длины k , проходящий через данную вершину;
 - б) циклов длины k не менее $n - k + 1$;
6. **Теорема Редди-Камиона.** Докажите, что в сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.
7. Докажите, что в любом сильно связном турнире, содержащем хотя бы 4 вершины, можно найти две вершины A и B таких, что удаление любой одной из вершин A и B не нарушает сильную связность.

Добавка

8. Дан турнир G . Обозначим за $h(G, uvw \dots)$ количество гамильтоновых путей в графе G , содержащих фрагмент пути по стрелкам $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow \dots$. Если в турнире нет такого пути (т.е. стрелки направлены как-то иначе), то $h(G, uvw \dots) = 0$. Конец пути обозначим символом \clubsuit . Граф, получаемый из G выкидыванием вершины x со всеми стрелками, обозначим $G \setminus x$. Выделим в графе G некоторое ребро $a \rightarrow b$. Граф G' отличается от G только заменой направления этой стрелки.
 - а) Докажите, что $h(G, ab\clubsuit) = h(G \setminus b, a\clubsuit)$ и $h(G, \clubsuit ba) = h(G \setminus b, \clubsuit a)$.
 - б) Пусть в графе G есть фрагмент $a \rightarrow b \rightarrow x$. Направим в графе $G \setminus b$ стрелку из a в x . Докажите, для нового графа $G \setminus b$ выполнено равенство $h(G, abx) = h(G \setminus b, ax)$.

Индукцией по количеству вершин в турнире докажем лемму: чётность количества гамильтоновых путей в турнире не изменится, если поменять направление одной стрелки.

в) Докажите, что $h(G, abx) \equiv h(G \setminus b, ax) + h(G \setminus b, xa) \pmod{2}$.

г) Докажите лемму.

д) **Теорема Редди.** Докажите, что количество гамильтоновых путей в турнире нечётно.

9. В турнире чётное число вершин. Докажите, что в нём есть гамильтонов путь, который не дополняется до цикла.

Серия №28. Композиция поворотов

17 июля

1. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

Теорема. Композиция двух поворотов на угол α и на угол β в случае $\alpha + \beta \neq 360^\circ$ является поворотом на угол $\alpha + \beta$, в противном случае – параллельным переносом.

Задачи

2. На сторонах BC , CA , CB треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 . Как построить точку $R_{C_1}^{60^\circ} \circ R_{B_1}^{60^\circ} \circ R_{A_1}^{60^\circ}(A)$?
3. На плоскости был нарисован пятиугольник и отмечены середины всех его сторон. Пятиугольник стёрли, середины сторон остались. Как при помощи циркуля и линейки восстановить пятиугольник?
4. Известно, что $R_{O_1}^\alpha \circ R_{O_2}^\beta = R_{O_3}^{\alpha+\beta}$, и точки O_1 , O_2 , O_3 образуют треугольник. Найдите углы этого треугольника.

Определение. Треугольник $O_1O_2O_3$ называют треугольником центров поворотов.

5. **Теорема Наполеона.** На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры – вершины правильного треугольника.
6. На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$, E – середина отрезка AN , D – центр треугольника BMN . Найдите угол CDE .
7. На дуге BC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точку A , взята точка D . На сторонах AB и AC отмечены точки E и F соответственно так, что $BD = BE$ и $CD = CF$. Точка G – середина EF . DF вторично пересекает окружность в точке K . Докажите, что точки B , G , K лежат на одной прямой.
8. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ как на диаметрах построили полуокружности. На AB и CD – внешним образом, а на BC и DA – внутренним. После чего отметили точки K , L , M , N – середины дуг AB , BC , CD и DA соответственно. Оказалось, что они образуют четырехугольник. Докажите, что $KLMN$ – параллелограмм.
9. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построили равносторонние треугольники ABD , BCE , CAF . Затем стёрли все, кроме точек D , E , F . Восстановите треугольник ABC циркулем и линейкой.

Серия №29. Показатели

18 июля

Определение. Число t называют показателем или порядком остатка a по модулю n , если t – наименьшее натуральное число такое, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Пусть t – показатель остатка a по модулю n . Докажите, что
 - а) если $m : t$, то $a^m \equiv 1 \pmod{n}$;
 - б) если $a^m \equiv 1 \pmod{n}$, то $m : t$;
 - в) $\varphi(n) : t$;
 - г) Остатки чисел $1, a, a^2, \dots, a^{t-1}$ по модулю n попарно различны.

Задачи

2. Показатели остатков a и b по модулю 101 равны 100. Известно, что $a^k \equiv b \pmod{101}$. Докажите, что k нечетно.
3. Пусть $n = 4q$, где q – нечётное простое, $(a, n) = 1$. Может ли показатель остатка a по модулю n быть равен $\varphi(n)$?
4. Пусть $p > 2$, $q > 5$, p и q – простые. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q . Докажите, что $q \equiv 1 \pmod{2p}$.
5. Найдите все натуральные n , для которых число $2^n - 1$ и n имеют одинаковый набор простых делителей.
6. Найдите все простые числа p, q такие, что $5^p + 5^q$ делится на pq .
7. Докажите, что для любого натурального n любой простой делитель числа $n^4 - n^2 + 1$ сравним с 1 по модулю 12.
8. Докажите, что показатель 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.
9. Найдите все натуральные n такие, что число $3^n - 2^n - 1$ является квадратом целого числа.

Серия №30. Геометрический разнобой

18 июля

1. Дан треугольник ABC . На продолжении BC за точку C взяли точку D так, что $BC = CD$. На продолжении CA за точку A взяли точку E так, что $AE = 2AC$. При этом оказалось, что $BE = AD$. Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.
2. Даны прямая l , окружность ω и точка A . Постройте циркулем и линейкой квадрат $ABCD$ такой, что точки B и C лежат на l и ω соответственно.
3. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты такие точки P , M и K , что отрезки AM , BK и CP пересекаются в точке G и сумма векторов $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CP}$ равна 0 . Докажите, что G – точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Конечное множество точек S таково, что для любых двух различных точек $A, B \in S$ существует движение плоскости, которое переводит A в B , но при этом всё множество переходит в себя. Докажите, что все точки множества S лежат на одной окружности.
5. Неравнобедренный остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Биссектриса AD пересекает описанную окружность в точке K . Окружность с диаметром AO проходит через точку D и пересекает AB и AC в точках E , F соответственно. Точки M , N – середины отрезков BE , CF соответственно. Лучи DM , DN пересекают прямую EF в точках X , Y соответственно. Докажите, что OK – серединный перпендикуляр к отрезку XY .
6. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD . Из точки M , лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H , а также прямые MC и MD , пересекающие прямую AB в точках F и K . Докажите, что $EF = KH$.
7. Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H . Точка M – середина стороны BC . Окружность ω_B проходит через точки B , H , M , окружность ω_C проходит через точки C , H , M . Прямая AB вторично пересекает ω_B в точке P , прямая AC вторично пересекает ω_C в точке Q . Прямая PH вторично пересекает ω_C в точке R . Прямая QH вторично пересекает ω_B в точке S . Докажите, что точки R , S , M лежат на одной прямой.
8. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABM , BCN , CAK . Из середины отрезка MN опущен перпендикуляр к стороне AC . Два других перпендикуляра определяются аналогично. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

Серия №31. Теория Рамсея

19 июля

1. а) Докажите, что среди любых 6 человек найдутся трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых людей.
б) Докажите, что среди любых 9 человек найдутся трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых людей.

Определения. *m -клика* – полный подграф на m вершинах. *Число Рамсея* $R(m, n)$ – наименьшее натуральное число x такое, что для любой раскраски рёбер полного графа на x вершинах в два цвета найдётся m -клика с рёбрами цвета 1, либо n -клика с рёбрами цвета 2.

Теорема Рамсея. $R(m, n)$ существует для любых натуральных m, n .

Упражнение. Докажите, что $R(1, n) = 1$, $R(2, n) = n$, $R(m, n) = R(n, m)$.

2. а) Найдите $R(3, 3)$.
б) Найдите $R(3, 4)$.
3. Докажите, что для любых натуральных $m, n \geq 3$ выполнено:
 - а) $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$.
 - б) $R(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$.
 - в) $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n) - 1$, если $R(m, n-1)$ и $R(m-1, n)$ – чётны.
4. Для любого натурального n верно $R(n, n) > (n-1)^2$.
5. Обозначим за $g(x, n)$ долю графов, содержащих клику на n вершинах, среди всех графов на x вершинах. Докажите, что:
 - а) $g(x, n) \leq \frac{x^n}{n! \cdot 2^{C_n^2}}$.
 - б) Для любого натурального $n \geq 2$ выполнено $R(n, n) \geq 2^{\frac{n}{2}}$.

Раскраски в несколько цветов

Определение. *Число Рамсея* $R(k; n_1, \dots, n_k)$ – наименьшее натуральное число x такое, что для любой раскраски полного графа на x вершинах в k цветов для некоторого i обязательно найдётся клика на n_i вершинах цвета i .

6. Докажите аналогичные оценки сверху для обобщения:
 - а) $R(k; n_1, \dots, n_k) \leq R(k; n_1-1, n_2, \dots, n_k) + \dots + R(k; n_1, n_2, \dots, n_k-1) - k + 2$.
 - б) $R(k; n_1, \dots, n_k) \leq \frac{(n_1+n_2+\dots+n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$.
7. Даны 6 произвольных иррациональных чисел. Докажите, что можно выбрать из них 3 числа x, y, z так, что числа $x+y, y+z, z+x$ иррациональны.
8. **Теорема Шура.** Все натуральные числа покрашены в несколько цветов. Тогда можно выбрать три одноцветных числа x, y, z , для которых $x+y=z$.

Серия №32. Многочлены над \mathbb{Z}_p

19 июля

Определение. Множество всех остатков (вычетов) по модулю n обозначим \mathbb{Z}_n . В случае, если n простое, для удобства будем писать \mathbb{Z}_p .

Определим многочлен над \mathbb{Z}_n как формальную запись $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, где коэффициенты $a_i \in \mathbb{Z}_n, a_m \neq 0$. Множество таких многочленов обозначается $\mathbb{Z}_n[x]$.

Из предыдущего листка:

Если два многочлена $P, Q \in \mathbb{Z}_p[x]$, то $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.

Теорема о делении с остатком. Для формальных многочленов $A(x), B(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ и $\deg R < \deg B$.

Теорема Безу для многочленов над \mathbb{Z}_p . $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$

Следствие из теоремы Безу. Количество корней многочлена не превосходит его степени.

Задачи

- Используя теорему Безу, разложите на множители многочлен $x^{p-1} - 1$ и докажите теорему Вильсона: для любого простого p число $(p-1)! + 1$ делится на p .
- а) Приведите пример ненулевого многочлена $P \in \mathbb{Z}_p[x]$ такого, что $P(x) = 0$ во всех точках $x \in \mathbb{Z}_p$.
б) Докажите, для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}_p[x]$ существует многочлен $Q \in \mathbb{Z}_p[x]$ степени не выше $p-1$, совпадающий с ним по модулю p во всех точках.
в) Докажите, что если два многочлена $P, Q \in \mathbb{Z}_p[x]$ степени не выше $p-1$ совпадают по модулю p по всех точках, то они равны формально.
- Докажите, что для любого целого m , не кратного $p-1$, существует n , не кратное p , такое, что $n^m \not\equiv 1 \pmod{p}$.
- Дана произвольная функция $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$. Докажите, что существует многочлен $P \in \mathbb{Z}_p[x]$ степени не выше $p-1$, совпадающий с f по модулю p во всех точках.
- Пусть $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, p – простое число. Оказалось, что $Q(0) = 0, Q(1) = 1$, и при любом натуральном k число $Q(k)$ дает остаток 0 или 1 при делении на p . Докажите, что $\deg Q \geq p-1$.

Серия №33. Неравенство Гёльдера

19 июля

В неравенстве средних можно использовать переменные несколько раз (и мы так делали), например, $\frac{x+x+y}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y}$. В общем виде это называется неравенством средних с весами.

Неравенство средних с весами. Пусть $x_i > 0$, а p_i – натуральные числа. Тогда

$$\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \geq x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n}$$

Равенство достигается при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Неравенство верно и для произвольных положительных p_i (но доказывать не будем).

1. а) Докажите неравенство для положительных рациональных чисел λ_i , сумма которых равна 1, и для положительных x_i :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

б) Докажите, что смысл неравенства не меняется при домножении всех x_i на одно и то же положительное число.

в) Пусть даны n наборов положительных чисел a_i, b_i, \dots, z_i и набор положительных рациональных чисел λ , при этом:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1,$$

...

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 1,$$

$$\lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z = 1.$$

Докажите, что тогда

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_a a_i + \lambda_b b_i + \dots + \lambda_z z_i}{\lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z} \right)^{\lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z} = 1.$$

г) Докажите для тех же наборов ещё одно неравенство:

$$(a_1 + \dots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + \dots + b_n)^{\lambda_b} \dots (z_1 + \dots + z_n)^{\lambda_z} \geq a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \dots z_1^{\lambda_z} + \dots + a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} \dots z_n^{\lambda_z}$$

д) **Неравенство Гёльдера.** Пусть даны n наборов положительных чисел a_i, b_i, \dots, z_i и набор положительных рациональных чисел λ , причём $\lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z = 1$. Тогда выполнено неравенство:

$$(a_1 + \dots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + \dots + b_n)^{\lambda_b} \dots (z_1 + \dots + z_n)^{\lambda_z} \geq a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \dots z_1^{\lambda_z} + \dots + a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} \dots z_n^{\lambda_z}$$

Равенство достигается при условии пропорциональности наборов, т.е. если

$$a_1 : a_2 : \dots : a_n \equiv b_1 : b_2 : \dots : b_n \equiv \dots \equiv z_1 : z_2 : \dots : z_n.$$

2. Докажите неравенство КБШ с помощью неравенства Гёльдера. А именно: для положительных чисел a_i, b_i выполнено

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Частный случай неравенства Гёльдера для 3 наборов в удобном виде:

$$(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)(c_1 + \dots + c_n) \geq \left(\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \dots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \right)^3.$$

Задачи

Все переменные в задачах считать положительными.

3. Докажите неравенство:

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a + b + c)^3}{3(x + y + z)}$$

4. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{a(b + c)} + \frac{1}{b(a + c)} + \frac{1}{c(a + b)} \geq \frac{27}{2(a + b + c)^2}$$

5. Докажите неравенство:

$$\frac{a^6}{b^2 + c^2} + \frac{b^6}{c^2 + a^2} + \frac{c^6}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{2} abc(a + b + c)$$

6. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{\sqrt{a + 2b}} + \frac{b}{\sqrt{b + 2c}} + \frac{c}{\sqrt{c + 2a}} \geq \sqrt{a + b + c}$$

7. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

8. Для $xy + yz + zx = 1$ докажите неравенство:

$$\frac{x^3}{1 + 9y^2xz} + \frac{y^3}{1 + 9z^2xy} + \frac{z^3}{1 + 9x^2yz} \geq \frac{(x + y + z)^3}{18}$$

Серия №34. Первообразный корень

20 июля

Определение. Пусть показатель остатка x по модулю n равен t . Если $t = \varphi(n)$, то x называется первообразным корнем по модулю n .

- Усиление теоремы Эйлера.** Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Докажите, что если $(a, n) = 1$, то $a^{\text{НОК}(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \varphi(p_2^{\alpha_2}), \dots, \varphi(p_k^{\alpha_k}))} \equiv 1 \pmod{n}$.
- Обратите внимание, что НОК из усиления теоремы Эйлера обычно меньше $\varphi(n)$, и докажите, что:
 - Не существует первообразного корня по модулю $n : pq$, где p, q – различные нечётные простые числа.
 - Не существует первообразного корня по модулю $n : 4p$, где p – нечётное простое число (эта задача у вас уже была!).
 - Не существует первообразного корня по модулям 8 и $8 \cdot 2^k$.

Следствие. Первообразные корни могут существовать только по модулю $2, 4, p^k, 2p^k$.

- Пусть существует остаток u , показатель которого по модулю p равен t . Найдите все корни уравнения $x^t \equiv 1 \pmod{p}$.
 - Докажите, что существует либо $\varphi(t)$, либо 0 остатков, имеющих показатель, равный t .
- Рассмотрим дроби $\frac{1}{p-1}, \frac{2}{p-1}, \dots, \frac{p-1}{p-1}$. Сократим все дроби. Пусть t – делитель числа $p-1$. Сколько дробей будут иметь знаменатель, в точности равный t ?
 - Лемма Гаусса.** Докажите формулу (суммирование по всем делителям числа $p-1$):

$$\sum_{t|p-1} \varphi(t) = p - 1$$

- Докажите, что существует не 0, а ровно $\varphi(t)$ остатков с показателем t .

Теорема. По нечётному простому p существует $\varphi(p-1)$ первообразных корней.

Задачи

- Докажите, что при любом натуральном k , где $\text{НОД}(k, 2026) = 1$, верно:

$$1^k + 2^k + 3^k \dots + 2026^k \equiv 1 + 2^k + 2^{2k} + \dots + 2^{2025k} \equiv 0 \pmod{2027}.$$

Число 2 является первообразным корнем по простому модулю 2027.

- Докажите, что для любого простого p первые $(p-1)$ натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ делилась на p .
- Пусть $p > 3$ – простое число. Докажите, что произведение всех первообразных корней по модулю p сравнимо с 1 по модулю p .
- Пусть q – простое число, а $4q+1$ – тоже простое. Докажите, что 2 является первообразным корнем по модулю $4q+1$.

9. Докажите, что для любого натурального n найдётся такое m , что $2^m + 2026 : 3^n$.
- 10.а) Пусть a – первообразный корень по простому нечетному модулю p . Докажите, что если a не является первообразным корнем по модулю p^2 , то $a + p$ – является.
- б) Докажите, что если b – первообразный корень по модулю p^2 , то b – первообразный корень и по модулю p^k при $k > 2$.

Серия №35. Теорема Хелли

20 июля

Определение. Выпуклое множество точек – такое множество, что для любых двух точек A, B из него все точки отрезка AB тоже ему принадлежат. Выпуклая оболочка множества – минимальное по включению выпуклое множество, содержащее в себе данное.

1. Множество точек S содержит вершины некоторого выпуклого многоугольника. Докажите, что выпуклая оболочка множества S содержит в себе весь многоугольник.
2. На плоскости даны $k \geq 4$ точек (возможно, совпадающих). Докажите, что можно разбить эти точки на 2 непустых подмножества так, что их выпуклые оболочки пересекаются (т.е. содержат хотя бы одну точку плоскости, не обязательно среди данных k).
3. **Теорема Хелли.** На плоскости расположено N выпуклых множеств, у любых трёх есть общая точка. Докажите, что тогда у любых $3 \leq n \leq N$ множеств есть общая точка. *Указание: проведите индукцию по n .*
4. Докажите, что теорема Хелли не верна для бесконечного числа множеств, т.е. даже если любые три множества выпуклы и пересекаются, то все множества могут не иметь общей точки.
5. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трех его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти стороны, попадают на них, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.
6. На плоскости проведено n прямых и для каждой прямой выбрали одну из двух полуплоскостей, на которые она делит плоскость. Известно, что выбранные полуплоскости целиком покрывают всю плоскость. Докажите, что можно оставить только 3 полуплоскости, которые также покрывают всю плоскость.
7. На столе сидит n комаров, любых троих из которых можно прибить круглой кружкой радиуса 1. Докажите, что их всех можно прибить этой кружкой одновременно.
8. **Теорема Юнга.** На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
9. **Теорема Бляшке.** Если выпуклый многоугольник A нельзя покрыть никакой полоской ширины 1, то он содержит круг радиуса $\frac{1}{3}$.
10. На плоскости дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.

Материалы соревнований

Вступительная олимпиада

2 июля

1. В турнире по настольному теннису участвовали 10 мальчиков и 6 девочек. Каждый участник сыграл с каждым по одному разу и одержал хотя бы одну победу. По итогам турнира оказалось, что все мальчики одержали разное количество побед, а все девочки – одинаковое. Победителями считаются те, кто одержали наибольшее число побед. Могли ли девочки победить в турнире? Ничьих в теннисе не бывает.
2. Внутри (не на границе) прямоугольника 7×12 выбрали 8 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше 5.
3. На острове используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Известно, что любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно при посредничестве нескольких переводчиков. Докажите, что тогда любые два островитянина смогут поговорить между собой, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков.
4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O . Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P , причём точка O лежит внутри треугольника BPC . На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90^\circ$. Окружность ω , описанная около треугольника PHD , вторично пересекает отрезок PC в точке Q . Докажите, что $AP = CQ$.
5. Конечно или бесконечно множество таких натуральных n , что число $(n!)^n + 1$ делится нацело на $n + 2025$?
6. В олимпиаде из 4 этапов участвует n школьников. Все участвуют в первом этапе, а во втором, третьем и четвёртом этапах – a, b, c участников соответственно. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, то должны выполняться неравенства $n \geq a \geq b \geq c \geq 0$. Кроме того, жюри хочет, чтобы во втором и в третьем туре выбыло поровну участников (т.е. $a - b = b - c$). Докажите, что жюри может выбрать участников на все этапы олимпиады ровно C_{2n}^n способами. Способы считаются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе.

Математический бой М8 смешанный

10 июля

1. Репьюнитом называется число, десятичная запись которого состоит только из единиц, то есть число вида $1,11,111, \dots$. Петя перемножил 2025 различных репьюнита, и Вася перемножил 2025 различных репьюнитов. Оказалось, что произведения совпали. Докажите, что Петя и Вася перемножали одни и те же наборы репьюнитов.
2. Дан равнобедренный остроугольный треугольник ABC , в котором $AB = AC$. Отрезок CD – высота треугольника ABC . Окружность ω_1 с центром C и радиусом CD пересекает AC в точке K , продолжение AC за точку C – в точке L . Окружность ω_2 с центром B и радиусом BD пересекает ω_1 в точке E и отрезок DL в точке M . Докажите, что $BM \parallel EC$.
3. Группу гирь будем называть равной, если сумма весов двух наибольших гирь в этой группе меньше суммы весов всех остальных. Дано 60 гирь различных весов, которые можно разбить на 12 равных групп по 5 гирь. Всегда ли эти 60 гирь можно разбить на 10 равных групп по 6 гирь?
4. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Докажите, что:

$$AP \cdot BC + BP \cdot AC + CP \cdot AB \geq 4S_{ABC}.$$
5. На планете несколько городов, соединённых дорогами. Каждая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами не более одной дороги, и дороги не пересекаются вне городов. Из каждого города выходит ровно 3 дороги: красная, жёлтая и зелёная. Известно, что если поехать, начав с произвольного города, чередуя красные и жёлтые дороги, то ровно через 6 переездов обязательно вернёшься в начало пути. Если же чередовать красные и зелёные дороги, то тоже всегда возвращаешься ровно через 6 переездов. Наконец, если чередовать жёлтые и зелёные дороги, то всегда возвращаешься ровно через 4 переезда. Какое наименьшее число городов может быть на планете?
6. Конечно или бесконечно множество точных квадратов, в двоичной записи каждого из которых единиц больше, чем нулей?
7. Пусть $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_k = a$ и $1 = b_1 < b_2 < \dots < b_l = b$ – все делители натуральных чисел a и b соответственно. Найдите a и b , если $a_{2025} + b_{2025} = a$ и $a_{2026} + b_{2026} = b$.
8. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого простого $p < n$ выполнено сравнение $p^n \equiv (p-1)^n + 1 \pmod{n^2}$.

Математический бой М8 профи

10 июля

1. Докажите, что существует бесконечно много троек целых чисел, удовлетворяющих уравнению $2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 2025$.
2. По кругу расставлены $n > 9$ фишек, у каждой из которых одна сторона чёрная, а другая белая. В начале одна фишка лежит чёрной стороной вверх, а остальные --- белой стороной вверх. Разрешается проделать следующую операцию: взять три любые фишки, лежащие подряд, первая из которых (считая по часовой стрелке) лежит чёрной стороной вверх, перевернуть вторую из них и переложить первую на место третьей, вторую на место первой и третью на место второй. Можно ли для любого непустого набора мест добиться того, чтобы чёрные сверху фишки лежали на всех этих местах и только на них?
3. Докажите, что существует лишь конечное число таких натуральных n , что сумма цифр числа $n!$ меньше 20^{25} .
4. Дан треугольник ABC , в котором $AB > AC$. Отрезок AD – биссектриса треугольника ABC , I – точка пересечения биссектрис, точка M – середина AD . Описанная окружность треугольника BIC пересекает отрезок BM в точке F . Докажите, что $\angle AFC = 90^\circ$.
5. $ABCD$ – ромб, точка P внутри него, но не лежит ни на одной диагонали. Точки M, N, R, Q – это проекции точки P на стороны AB, BC, CD, DA соответственно. Серединные перпендикуляры к отрезкам MN и RQ пересекаются в точке S , а серединные перпендикуляры к отрезкам NR и MQ пересекаются в точке T . Докажите, что $PSOT$ – прямоугольник.
6. Положительные числа x, y, z, a, b и c удовлетворяют условию $xuz = ax + by + cz$. Докажите, что $x + y + z > \sqrt{(a+b)} + \sqrt{b+c} + \sqrt{a+c}$.
7. Фигура $\Phi/4$ бьет как ферзь, но только в двух направлениях из восьми (эти два направления для каждой $\Phi/4$ могут быть свои). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга $\Phi/4$ можно расставить на шахматной доске?
8. Пусть n – натуральное число. Обозначим через P_k количество целых неотрицательных решений уравнения $kx + (k+1)y = n - k + 1$. Выразите сумму $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ через n .

Математический бой М8-М9 профи

15 июля

1. Найдите все натуральные $n > 1$, удовлетворяющие следующему свойству: для любых целых чисел a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , сумма которых не делится на n , существует индекс i такой, что ни одно из чисел $a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+n-1}$ (все индексы смотрятся по модулю n) не делится на n .
2. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots . Известно, что существует натуральное $N > 1$ такое, что для любого $n \geq N$ число $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$ целое. Докажите, что существует натуральное M такое, что $a_m = a_{m+1}$ для любого $m \geq M$.
3. В толпе людей G некоторые знакомы друг с другом (знакомство взаимно). Пусть A – произвольная группа людей, содержащая не больше половины толпы G . Те, кто не в группе A , но знаком хоть с кем-нибудь из A , образуют группу B . Оказалось, что для любой группы A , соответствующая ей группа B такова, что $|B| \geq |A|$. Докажите, что можно выделить не менее двух третей толпы G и разбить её на пары знакомых.
4. Пусть ABC – остроугольный треугольник, H и O – его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Прямые AO и BH пересекаются в точке D . Точка P на AB такова, что $PH = PD$. Докажите, что точки P, B, O и D лежат на одной окружности.
5. Дан n -мерный гиперкуб. Половина его вершин белые, остальные – чёрные. Докажите, что можно найти хотя бы 2^{n-1} рёбер с разноцветными концами.
6. На доске написано $2m \geq 4$ чисел $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, 2m \cdot (2m + 1)$. Каждым ходом с доски стираются три числа a, b и c , вместо которых записывается число $\frac{abc}{ab+bc+ac}$. В конце осталось два числа, одно из которых равно $\frac{4}{3}$. Докажите, что второе число больше 4.
7. Пусть a, b, c – положительные числа, $a + b + (a + c)(b + c) = 5$. Докажите, что $abc(a + b + c) \leq 2$.
8. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC . На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AM - MX = CY - YX$. Докажите, что угол XMY – острый.

Математический бой М7-М8 профи

15 июля

1. На множестве натуральных чисел определена операция $@$, сопоставляющая каждой паре натуральных чисел a и b число $a@b$ (при этом не обязательно $a@b = b@a$). Известно, что $(a + b)@c = (a@c) + (b@c)$ и $a@(b + c) = (a@b)@c$ для любых натуральных чисел a, b и c , а также $5@5 = 160$. Чему может быть равно $7@7$?
2. Найдите все простые p и натуральные n , для которых $p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^n$.
3. 2025 белых и 1 чёрная точка расположены по кругу. За одну операцию можно сделать одно из следующих действий:
 1. Выбрать две соседние точки одного цвета и перекрасить их.
 2. Выбрать две точки разных цветов, между которыми ровно одна другая точка, и перекрасить их.Можно ли за несколько таких операций получить раскраску, в которой цвет каждой точки противоположен изначальному?
4. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Докажите, что $x + y \leq 2$.
5. В неравнобедренном треугольнике ABC провели медианы AM и CN . На стороне AC отметили точку X , а на отрезке CX – точку Y , $\angle ANX = \angle BNC$ и $\angle AMB = \angle CMY$. Докажите, что если $AX = CY$, то треугольник ABC – прямоугольный.
6. 101 клетка доски $n \times n$ окрашена в чёрный цвет, остальные клетки – белые. Известно, что существует ровно один способ разрезать доску по линиям сетки на прямоугольники так, чтобы в каждом из них была ровно одна чёрная клетка. Найдите наименьшее возможное значение n .
7. Учёные пытаются подать сигнал в космос с помощью 15 идентичных квантовых резонаторов. Каждый резонатор может находиться в одном из двух состояний: «когерентное» или «декогерентное». Они различаются только на квантовом уровне и различать их внешне учёные не умеют. Их начальные состояния неизвестны. Учёные могут выбирать любой резонатор и изменить его состояние на противоположное (если был когерентен – становится декогерентным, и наоборот). Сигнал в космос автоматически подаётся, когда не менее 10 резонаторов одновременно оказываются в когерентном состоянии. Докажите, что учёные могут гарантированно отправить сигнал, проведя не более 43 изменений.
8. Треугольник ABC , в котором $\angle C = 30^\circ$, расположен в угле $\angle DBE$, при этом $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBE$, $AB = BD$ и $BC = BE$. Оказалось, что $2AC = DE$. Найдите угол CAD .

Заключительная олимпиада

21 июля

Довывод

1. На дискотеке присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое – мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) – с пятью и остальные восемь – с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.
2. Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству $ab + cd = ac - 40bd$. Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.
3. Дима и Маша хотят показать детям фокус. Сначала дети вписывают в клетки шахматной доски числа $1, 2, \dots, 64$ по своему усмотрению, а затем Маша смотрит на доску и закрывает доминошкой какие-то две соседние клетки. Дима, который не видел предыдущих действий, должен прийти и угадать, в какой клетке какое число закрыто. Удастся ли фокус Диме с Машей?
4. Разбейте все положительные рациональные числа на два непустых непересекающихся подмножества X и Y так, чтобы произведение любых двух чисел из разных множеств лежало в X , а произведение любых двух чисел (возможно, совпадающих) из одинаковых множеств лежало в Y .
5. Дан выпуклый шестиугольник, каждая большая диагональ которого делит его площадь пополам. Докажите, что эти диагонали пересекаются в одной точке.

Вывод

6. Саша и Юра по очереди вписывают числа $1, 2, \dots, n^2$ в клетки квадрата $n \times n$ без повторений. Саша выигрывает, если в конце игры сумма чисел в некотором столбце делится на n . При каких n Юра сможет ему помешать?
7. Сколько существует натуральных $N \leq 2025$ таких, что найдутся действительные x, y, z , для которых $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$, а $\sqrt{x+N} + \sqrt{y+N} + \sqrt{z+N}$ – целое число?
8. На стороне BC треугольника ABC выбирается переменная точка D , а на сторонах AB , AC отмечаются точки E, F так, что $BD = DE$, $CD = DF$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF проходит через фиксированную точку, отличную от A .

Послевывод

9. Дано натуральное число n . Последовательность a_0, a_1, \dots, a_{2n} обладает следующими двумя свойствами:
 1. Для любого $0 \leq i \leq 2n$ выполнено $a_i \in [0; n]$;
 2. Для любого $0 \leq k \leq n$ и любого целого неотрицательного m среди чисел $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k}$ найдётся число, равное $\left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor$.
 Найдите количество таких последовательностей.

Вопросы к теорзачёту М8 профи

24 июля

Алгебра

1. Неравенство между средним арифметическим и геометрическим. Наибольшее значение выражения $x^p y^q$ при фиксированной сумме $x + y$ (2.7) Наименьшее значение выражения $ma^2 + mb^2 + c^2$ при фиксированной сумме $ab + bc + ac$ (9.3b)
2. Многочлены. Теорема о делении с остатком. Теорема Безу. Следствия из теоремы Безу. (20)
3. Многочлены над \mathbb{Z}_p . Теорема Безу. Теорема Вильсона (32.1). Доказать, что все функции $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ являются многочленами степени не выше $p - 1$ (32.2бв, 32.4).
4. Неравенство Коши с натуральными весами. Неравенство Гёльдера с рациональными весами. Условие равенства (33.1д).

ТЧ

5. Рождественская теорема Ферма (14.3). Теорема Ферма Эйлера (14.4б).
6. Доказать, что для простого $p > 2$ существует представление $a^2 + b^2 + 1^2 + 0^2 = mp$ (14.5б). Доказать, что в минимальном представлении $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = mp$ число m – нечётно и меньше p (14.5вг). Построить представление $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = mp$ при $n < m$. (14.5д).
7. Доказать, что произведение сумм 4 квадратов является суммой 4 квадратов (14.5е). Пользуясь леммами о существовании представлений особого вида (14.5бвгд – без доказательства), доказать теорему Лагранжа (14.5жзи).
8. Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Критерий Эйлера (17.3). Критерий Гаусса (17.4).
9. Вычисление символа Лежандра $\left(\frac{2}{p}\right)$ (22.6). Доказательство бесконечности множества простых вида $8k + 3, 8k + 5, 8k + 7$ по отдельности (22.8).
10. Уравнение Пелля $x^2 - ky^2 = 1$. Поиск всех решений на основе фундаментального решения (26.4). Рекуррентные соотношения для решений (26.3).
11. Теорема о существовании решения уравнения Пелля $x^2 - ky^2 = 1$.
12. Первообразный корень. Усиление теоремы Эйлера. Несуществование первообразных корней по модулям, отличным от $2, 4, p^k, 2p^k$ (34.1, 34.2). Лемма Гаусса (34.3б). Существование первообразного корня по простому модулю.

Комбинаторика

13. Бесконечные множества. Задача о потомках Адама. (10.2) Существование возрастающей подпоследовательности в последовательности натуральных чисел (10.4) Существование монотонной подпоследовательности. (10.7)
14. Достаточное условие существования правильной покраски вершин связного графа (12.1). Доказать, что если вершины нельзя правильно покрасить менее, чем в k цветов,

то в k -цветной раскраске найдётся разноцветный путь по всем цветам (12.3).

15. Гамильтоновы Пути и циклы. Теорема Оре (18.3). Теорема Дирака (18.4).

16. Счётность и несчётность. Доказать счётность множества \mathbb{Q} и несчётность множества \mathbb{R} (23.3б, 23.7г). Доказать счётность множества конечных и несчётность множества бесконечных подмножеств \mathbb{N} (23.4б, 23.7д).

17. Лемма Бернсайда: доказать, что размер стабилизатора одной раскраски является делителем размера группы преобразований (формула $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$) (24.2вгде).

18. Лемма Бернсайда: доказать лемму, пользуясь формулой $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$ (24.2жзи).

19. Сильная связность. Выделение сильно связной компоненты, конденсация (27.3) Теорема Муна. Теорема Редей-Камиона.

20. Теорема Рамсея. Оценки $R(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$, $R(n, n) \geq 2^{\frac{n}{2}}$ (31.3б, 31.5б).

Геометрия

21. Векторы. Единственность представления вектора в базисе (1.5а). Критерий коллинеарности через базис (1.5б). Доказать, что если сумма неколлинеарных векторов равна $\vec{0}$, то из них составляется выпуклый многоугольник. Выражения для векторов \vec{ON} , \vec{OM} в треугольнике, средней линии в четырёхугольнике (1.2, 1.4, 1.11).

22. Центр масс. Существование и единственность (7.1). Теорема о группировке масс (7.2, 7.3). Точка пересечения биссектрис, внешних биссектрис (7.7бв). Теорема Менелая (7.11)

23. Свойства скалярного произведения векторов. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма (15.3). Тождество $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = \vec{0}$. (15.4)

24. Гомотетия. Лемма Архимеда (19.3). Окружность 9 точек (19.4). Композиция гомотетий (19.9в). Теорема Монжа (19.9г).

25. Доказать, что прямая Симсона для точки делит пополам отрезок между ней и ортоцентром треугольника (19.6в). Доказать, что центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем точки касания полувписанной окружности и сторон (19.8вг).

26. Поворотная гомотетия. Лемма о парах подобных треугольников (21.2). Поворотная гомотетия и окружности (21.3). Построение центра поворотной гомотетии (21.4).

27. Теорема Шаля. Представление основных типов движений в виде композиции симметрий (25.4). Классификация движений по неподвижным точкам и ориентации.

28. Композиция поворотов. Треугольник центров поворотов. Теорема Наполеона.